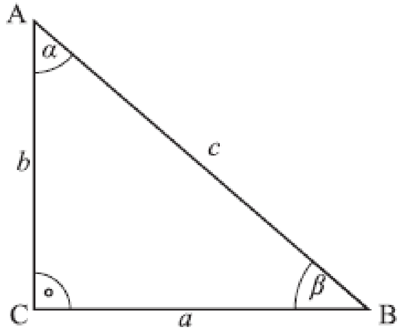
Основни појови тригонометрије уведени у I разреду

Тригонометрија правоуглог троугла



$$\sin\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{хипотенуза}}$$

$$tg\alpha = \frac{\text{наспрамна катета}}{\text{налегла катета}} \qquad ctg\alpha = \frac{\text{налегла катета}}{\text{наспрамна катета}}$$

За комплементне углове α и β (α+β=90°) важе релације: $\sin\alpha = \cos\beta$, $\sin\beta = \cos\alpha$, $tg\alpha = ctg\beta$ **и** $ctg\alpha = tg\beta$.

За неке оштре углове можемо тачно да одредимо вредности одговарајућих тригонометријских функција:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример1: Дужине катете правоуглог троугла ABC је $a = 16$, а вредност њеног наспрамног угла је $\alpha = 30^\circ$. Одредити дужине страница тог троугла.

Пример2: Дужине хипотенузе правоуглог троугла ABC је $c = 8$, а вредност оштрог угла $\alpha = 52^\circ$. Одредити дужине страница тог троугла.

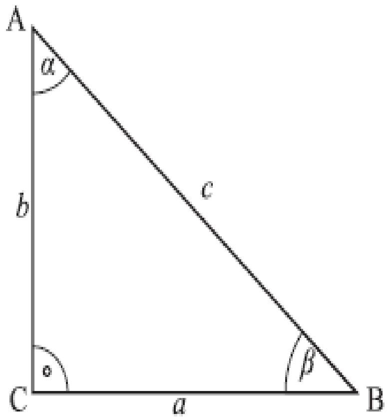
Израчунај вредност израза:

а) $\dfrac{5\sin 25^\circ + 7\cos 65^\circ}{2\sin 25^\circ}$

б) $\dfrac{ctg 60^\circ + ctg 45^\circ}{tg 30^\circ + tg 45^\circ}$

в) $\dfrac{\sin 20^\circ \cdot ctg 70^\circ}{\cos 70^\circ \cdot tg 20^\circ}$

Наведени идентитети се једноставно доказују помоћу дефиниције тригонометријских функција:



$$a^2+b^2=c^2 \quad /:c^2$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{b}=tg\alpha$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$$

1. Израчунати вредности осталих тригонометријских функција, ако је дато:

   а) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ б) $tg\alpha=\frac{4}{5}$

2. Израчунати: $A=\frac{3\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2}$, ако је дато: $tg\alpha=1$.

3. Ако је $\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=1$ израчунати $tg\alpha$.

   Решење $\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}=1$, дељењем са *cos α, имамо* $\frac{3tg\alpha-1}{tg\alpha+2}=1$, тј. $tg\alpha=\frac{3}{2}$.

4. Доказати једнакост: а) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

б) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha=(1+\cos\alpha)(1+tg\alpha)$

в) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=-2ctg^2\alpha$

Решење а) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

б) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+tg\alpha=(1+\cos\alpha)+(1+\cos\alpha)\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=(1+\cos\alpha)(1+tg\alpha)$

в) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\cos^2\alpha-\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{-2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=-2ctg^2\alpha$

5. Израчунати $\sin\alpha$ ако је $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=\dfrac{1}{81}$. [$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$]

Задаци за вежбу

збирка 1350-1413